

Supersymmetrie auf dem Raumgitter

Andreas Wipf

Theoretisch-Physikalisches Institut, FSU Jena

3. April 2019

Perlen der Physik

Warum diskretisieren wir Quanten(feld)theorien?

- Abweichung von freiem System klein: Störungstheorie
- Wenn nicht: stark wechselwirkende Systeme

Eigenschaften nur durch das korrelierte
Zusammenwirken der Bestandteile erklärbar

- Je nach Skala kann Theorie schwach oder stark wechselwirken
- Beispiele für stark wechselwirkende Systeme:
 - ▶ starke Wechselwirkung bei niedrigen Energien
 - ▶ kompakte Objekte in der Astrophysik
 - ▶ Hochtemperatur-Supraleiter
 - ▶ ultrakalte Atome in optischen Gittern
 - ▶ statistische Systeme in der Nähe von Phasenübergängen

Theoretische Zugänge

- **exakt lösbare Modelle (hohe Symmetrie)**
- **Näherungen**
Molekularfeldnäherung, Entwicklungen in $1/g$, ...
- **Beschränkung auf effektive Freiheitsgrade**
Born-Oppenheimer, Landau-Theorie, ...
- **Methode der Renormierungsgruppe**
wichtiges Werkzeug in Jena
- **Numerische Simulationen**
Gitterfeldtheorien = spezielle statistische Systeme
⇒ mächtige Simulationsmethoden der statistischen Physik

Ausgangspunkt: Pfadintegraldarstellung

- Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle, \quad \hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}$$

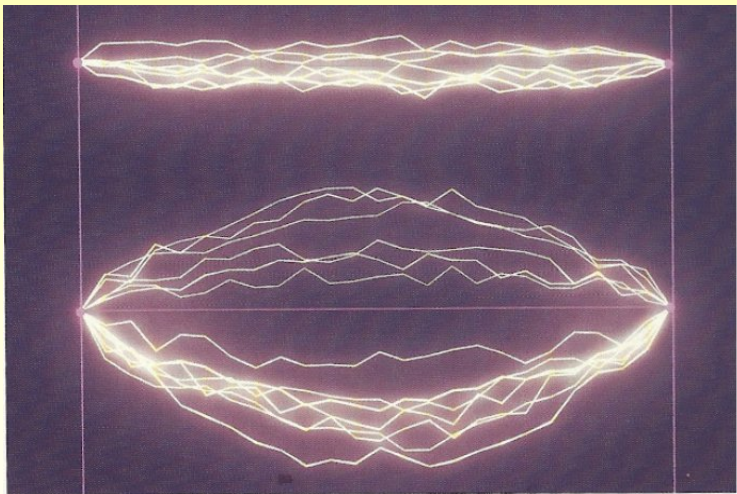
- Ortsraum: Übergangsamplitude $q \rightarrow q'$ im Intervall $[0, t]$

$$\langle q' | \hat{U}(t) | q \rangle = \langle q' | e^{-it\hat{H}/\hbar} | q \rangle = U(t, q', q)$$

- Feynman: Summe über Wege/Pfade

$$U(t, q', q) \propto \sum_{\text{alle Pfade}} e^{iS[\text{Pfad}]/\hbar}$$

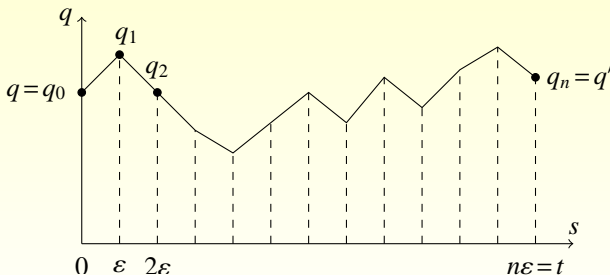
- Propagation längs aller Pfade mit $q(0) = q$ und $q(t) = q'$
Amplitude $\propto \exp(iS[\text{Pfad}]/\hbar)$



- formales Pfadintegral

$$U(t, q', q) \propto \int_{q(0)=q}^{q(t)=q'} \mathcal{D}q e^{iS[q]/\hbar}$$

- Diskretisierung: $[0, t]$ ersetzt durch $t_k = k\varepsilon$, $k = 0, 1, \dots, n$ mit $\varepsilon = t/n$; diskr. Pfad $q_k = q(t_k)$ mit $q_0 = q$, $q(n) = q'$



- Gitter-Regularisierung:

$$S = \int_0^t ds L(q, \dot{q}), \quad L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$$

- Differenzialquotient \rightarrow Differenzenquotient, z.B.

$$\dot{q}(t_k) \approx \frac{q(t_{k+1}) - q(t_k)}{\varepsilon} \equiv \frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon}$$

- Integral \rightarrow Riemannsche Summe

$$\int_0^t ds V(q(s)) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon V(q_k)$$

- Pfadintegral durch Grenzprozess **definiert**:

$$U(t, q', q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_{n-1} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon} \right)^{n/2} \\ \times \exp \left\{ i\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(q_k) \right) \right\}$$

- **Kontinuumsimes** $\varepsilon = t/n \rightarrow 0$ bzw. $n \rightarrow \infty$
- in Simulationen: $n \approx 1\,000 - 10\,000$
- hochdimensionales Integral \rightarrow Fluch der Dimension

Euklid'sches Pfadintegral

- setze in Schrödinger-Gleichung $t = -i\tau \Rightarrow$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \implies \hbar \frac{d}{d\tau} |\psi\rangle = -\hat{H} |\psi\rangle \quad \text{Diffusion}$$

- Lösung der Diffusionsgleichung

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\tau \hat{H} / \hbar} |\psi(0)\rangle$$

- Pfadintegral for $t \mapsto -i\tau$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) &\longrightarrow -\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) = -L_E(q, \dot{q}) \\ i \int_0^t ds L(q, \dot{q}) &\longrightarrow - \int_0^\tau ds L_E(q, \dot{q}) \equiv -S_E[q] \end{aligned}$$

- Formales Euklid'sches Pfadintegral

$$K(\tau, q', q) = \langle q' | e^{-\tau \hat{H}/\hbar} | q \rangle \propto \int_{q(0)=q}^{q(\tau)=q'} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]/\hbar}$$

- regularisierte Gitterversion $q_0 = q, q_n = q'$.

$$K(\tau, q', q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_{n-1} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon} \right)^{n/2} e^{-S_E(q_0, q_1, \dots, q_n)/\hbar}$$

$$\text{mit } S_E(\dots) = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon} \right)^2 + V(q_k) \right\}$$

- wohldefiniertes **Wiener-Maß** auf Wegen $q \rightarrow q'$
- Maß(diff.bare Wege) = 0, Maß(stetige Wege) = 1

Quantenstatistik

- setze $\tau = \hbar\beta$ inverse Temperatur $\beta = 1/kT$
- setze $q' = q$
- integriere über $q \Rightarrow$ Spur

$$\int dq K(\hbar\beta, q, q) = \text{Spur} \left(e^{-\beta\hat{H}} \right) = Z(\beta) = \sum e^{-\beta E_n}$$

- **kanonische Zustandssumme** für System mit \hat{H}
= Pfadintegral über alle β -periodischen Wege

$$Z(\beta) \propto \oint_{q(0)=q(\hbar\beta)} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]/\hbar}$$

- **regularisierte Gitterversion = klassisches Spinmodell**

$$Z(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_n \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon} \right)^{n/2} e^{-S_E(q_1, \dots, q_n)/\hbar}$$

- Identifikation: $q_0 \equiv q_n$ und $q_{n+1} \equiv q_1$
- Temperaturabhängigkeit $\varepsilon = \hbar\beta/n$
- **harmonischen Oszillator** mit Kreisfrequenz ω ($\hbar = 1$)

$$Z(\beta) = \frac{1}{2 \sinh(\beta\omega/2)} = e^{-\beta\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega} = \sum e^{-\beta E_n}$$

⇒ **Energien**

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- realistische Systeme: hochdimensionale Integrale

$$\int dq_1 \dots dq_n F(q_1, \dots, q_n)$$

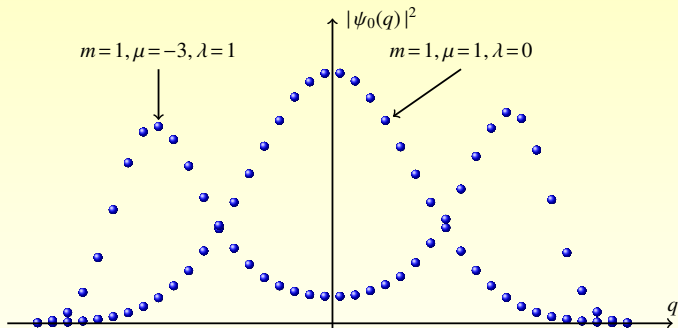
- weder analytisch noch numerisch berechenbar
- stochastische Methoden, z.B. Monte-Carlo **important sampling**

Was kann man bestimmen?

- Energien und Wellenfunktionen
- Übergangswahrscheinlichkeiten
- thermodynamische Potentiale
- Korrelationsfunktionen

Beispiel: anharmonischer Oszillator

$$S_E = \frac{m}{2} \hat{p}^2 + V(\hat{q}), \quad V(q) = \mu q^2 + \lambda q^4$$



see: A. Wipf, Statistical Approach to QFT, Lecture Notes in Phys. 864

Skalarfeld auf dem Gitter

- spinlose Teilchen \sim Skalarfeld
- Teil des Standardmodells der Teilchenphysik (Higgssektor)
- evtl. verantwortlich für Inflation im frühen Universum
Fluktuationen = Keime für Strukturentstehung
- Übergang Punktmechanik \rightarrow Feldtheorie

$$q_i(t) \equiv q(t, i) \longrightarrow \phi(t, \mathbf{x}) \quad , \quad \sum_i \longrightarrow \int d^{d-1}x$$

- Wirkung = Integral über Zeit und Raum

$$S[\phi] = \int_{\text{Raumzeit}} d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right)$$

Pfadintegral-Quantisierung

- Integration über alle Skalarfelder (Funktionalintegral)

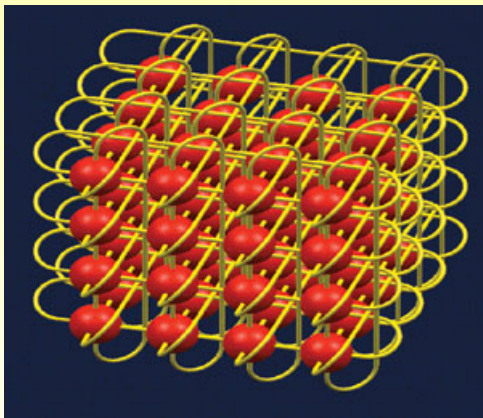
$$Z \propto \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar}$$

- Quantenstatistik \Rightarrow Euklid'sches Funktionalintegral

$$Z \propto \oint \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]/\hbar}, \quad \phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi(\tau + \beta, \mathbf{x})$$

- positive Euklid'sche Wirkung

$$S_E[\phi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \nabla\phi \nabla\phi + V(\phi) \right)$$

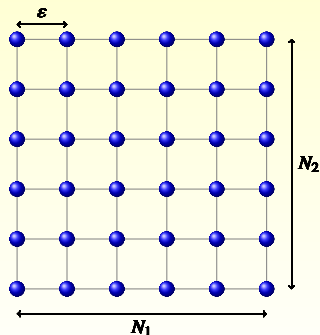


Gitterfeld ϕ_x auf Punkten eines Raumzeit-Gitters Λ definiert

Gitterregularisierung

- d -dim. Euklid'sche Raumzeit \rightarrow Gitter Λ , Punkte $x \in \Lambda$
kontinuierliches Feld $\phi(x) \rightarrow$ Gitterfeld $\phi_x, x \in \Lambda$
- hyperkubisches Gitter:

$$x^\mu = \varepsilon n^\mu \quad \text{mit} \quad n^\mu \in \{1, 2, \dots, N_\mu\}$$



- endliches Gitter: Länge in μ -Richtung: $L_\mu = \varepsilon N_\mu$
- periodisches Gitter (Torus): Identifikation $x^\mu \sim x^\mu + L_\mu$
- Gitterkonstante ε , Volumen $V = \varepsilon^d N_1 N_2 \cdots N_d$

- Diskretisierung der Raumzeit: Integral \rightarrow Riemannsche Summe, partielle Ableitung \rightarrow Differenzenquotient

$$\int d^d x \dots \rightarrow \varepsilon^d \sum \dots, \quad (\partial_\mu \phi)_x = \frac{\phi_{x+\varepsilon e_\mu} - \phi_x}{\varepsilon}$$

- Euklid'sche Wirkung des Gitterfeldes

$$S_L = \frac{\varepsilon^d}{2} \sum_{\langle x,y \rangle} \left(\frac{\phi_x - \phi_y}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{m^2 \varepsilon^d}{2} \sum_x \phi_x^2 + \dots$$

Möglichst alle Symmetrien der Kontinuumstheorie behalten!

- Poincare-Symmetrie ☹
- Eichsymmetrie ☺, globale Symmetrien (und Brechung) ☺

Stochastische Methoden

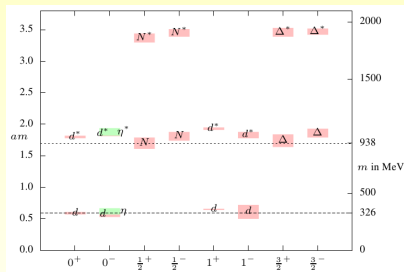
- 64^4 -Gitter $\approx 10^7$ -dimensionales Integral ☹
- 10 Stützstellen in jede Richtung $\Rightarrow 10^{10^7}$ Stützstellen
- Hauptbeitrag zu Integral von Konfigurationen mit minimalem S_L
 \Rightarrow stochastische Algorithmen, dominierende Felder
- erzeuge Feldkonfigurationen $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ verteilt nach $e^{-S_L[\phi]}$

$$\langle O \rangle \propto \sum_{\mu} O(\phi_{\mu})$$

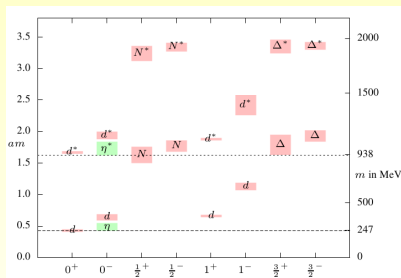
- **Verallgemeinerungen:**
Eichtheorien, Theorien mit Fermionen, Quantengravitation,
...

Massen von Mesonen, Baryonen und Diquarks

Ensemble	β	κ	$m_{d(0^+)}a$	$m_N a$	$m_{d(0^+)} [\text{MeV}]$	$a [\text{fm}]$	$a^{-1} [\text{MeV}]$	MC
Heavy	1.05	0.147	0.59(2)	1.70(9)	326	0.357(33)	552(50)	7K
Light	0.96	0.159	0.43(2)	1.63(13)	247	0.343(45)	575(75)	5K

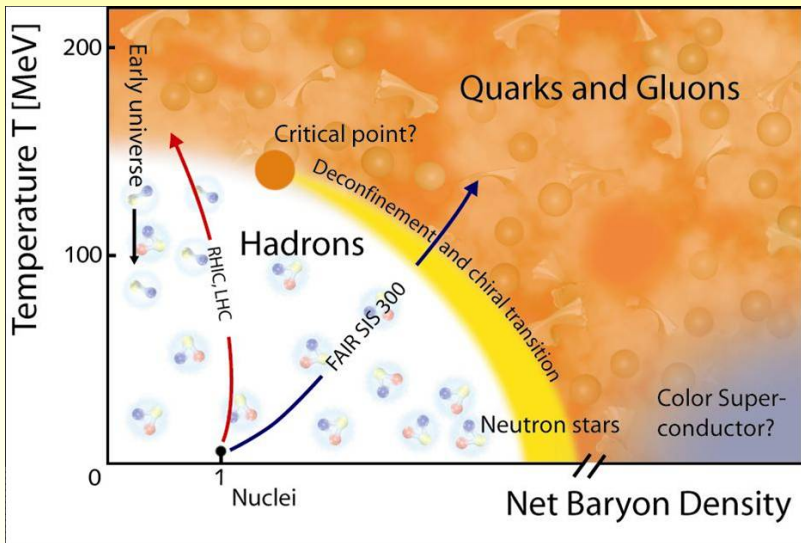


schweres Ensemble



leichtes Ensemble

Wellegehausen, Maas, Smekal, AW (2013)



Warum Supersymmetrie (Susy)?

- Eindeutige Erweiterung der Poincare-Symmetrie (Graduierung)
- Susy-Transformationen verbinden Bosonen und Fermionen

$$\hat{Q} |\text{Boson}\rangle \sim |\text{Fermion}\rangle \quad \text{und} \quad \hat{Q} |\text{Fermion}\rangle \sim |\text{Boson}\rangle$$

Die Theorie ist so schön – sie muss wahr sein

- Bosonen und Fermionen im gleichen Multiplett
- Am CERN gesucht (LSP: missing p_{\perp}): bisher ohne Erfolg

Supersymmetrische Quantenmechanik

- einfach, wesentliche Strukturen, keine Divergenzen
- ist eindimensionale susy Feldtheorie
- Hilbert-Raum: bosonischen und fermionischen UR

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_F, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_B\rangle \\ |\psi_F\rangle \end{pmatrix}$$

- linearer Operator $\hat{A} : \mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}_B$; nilpotente Superladung

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{A} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \implies \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = 0$$

- block-diagonaler Super-Hamilton-Operator

$$\hat{H} \equiv \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = \begin{pmatrix} \hat{A}\hat{A}^\dagger & 0 \\ 0 & \hat{A}^\dagger\hat{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_B & 0 \\ 0 & \hat{H}_F \end{pmatrix}$$

- kommutiert mit Superladung

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0 \quad (\text{wegen } \hat{Q}^2 = 0)$$

- Fermionzahloperator

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad [\hat{N}, \hat{H}] = 0$$

- bosonische Zustände: $\hat{N} = 0$
- fermionische Zustände: $\hat{N} = 1$.

- \hat{Q} und \hat{Q}^\dagger erniedrigen bzw. erhöhen Fermionzahl um Eins

$$[\hat{N}, \hat{Q}] = -\hat{Q} \quad \text{und} \quad [\hat{N}, \hat{Q}^\dagger] = \hat{Q}^\dagger$$

- Verknüpfungsrelationen

$$\hat{A}\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{H}_B\hat{A} = \hat{A}\hat{H}_F, \quad \hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{H}_F\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{H}_B$$

$\Rightarrow \hat{H}_B$ und \hat{H}_F haben identische angeregte Energien $E > 0$

$$\hat{H}_F |\psi_F\rangle = E |\psi_F\rangle \xrightarrow{\hat{A}} \hat{A} \hat{H}_F |\psi_F\rangle = \hat{H}_B \hat{A} |\psi_F\rangle = E \hat{A} |\psi_F\rangle$$

$$\hat{H}_B |\psi_B\rangle = E |\psi_B\rangle \xrightarrow{\hat{A}^\dagger} \hat{A}^\dagger \hat{H}_B |\psi_B\rangle = \hat{H}_F \hat{A}^\dagger |\psi_B\rangle = E \hat{A}^\dagger |\psi_B\rangle$$

- **Übungsaufgabe:** Zustände mit Energie Null

$$\hat{H}_B |0_B\rangle = 0 \iff \hat{A}^\dagger |0_B\rangle = 0$$

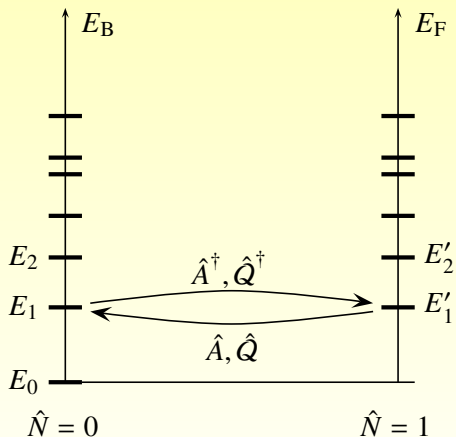
$$\hat{H}_F |0_F\rangle = 0 \iff \hat{A} |0_F\rangle = 0$$

- Grundzustand in \mathcal{H}_B wird von \hat{A}^\dagger annihiliert
- Grundzustand in \mathcal{H}_F wird von \hat{A} annihiliert
- **Übungsaufgabe:** Für $E > 0$ gilt

$$|\psi_F\rangle \neq 0 \Rightarrow \hat{A} |\psi_F\rangle \neq 0$$

$$|\psi_B\rangle \neq 0 \Rightarrow \hat{A}^\dagger |\psi_B\rangle \neq 0$$

Typisches Spektrum



Supersymmetrische Wellenmechanik

- verallgemeinerte Auf- und Absteigoperatoren

$$\hat{A} = i\partial_x + iW(x) \quad , \quad \hat{A}^\dagger = i\partial_x - iW(x)$$

- Partner-Hamilton-Operatoren

$$\hat{H}_B = \hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{p}^2 + V_B, \quad V_B = W^2 + W'$$

$$\hat{H}_F = \hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{p}^2 + V_F, \quad V_F = W^2 - W'$$

- Grundzustand mit $E = 0$

$$(\partial_x - W(x))\psi_B(x) = 0 \quad \text{oder} \quad (\partial_x + W(x))\psi_F(x) = 0$$

- Lösungen

$$\psi_B(x) \propto e^{\chi(x)} \quad \text{und} \quad \psi_F(x) \propto e^{-\chi(x)}$$

- χ Stammfunktion des Superpotentials

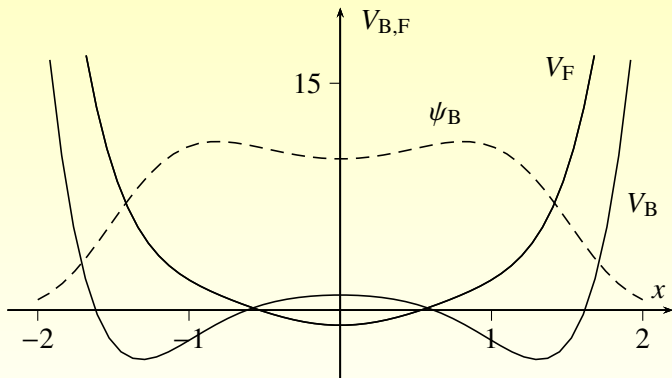
$$\chi(x) = \int^x W(x') dx'$$

- $\psi_B(x)$ oder $\psi_F(x)$ in $L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ Supersymmetrie realisiert
- $\psi_B(x) \cdot \psi_F(x) = \text{const.} \Rightarrow$ maximal eine Lösung in $L_2(\mathbb{R})$
- Beispiel:

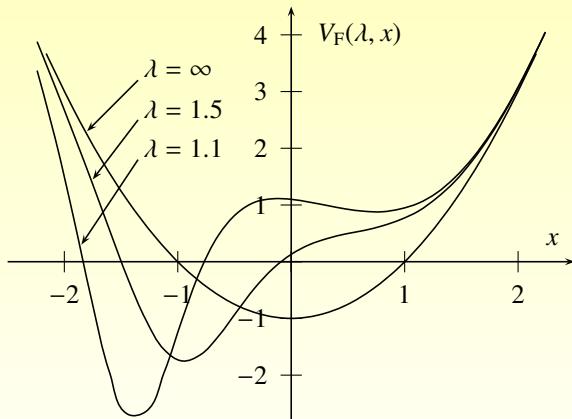
$$W = \lambda x^p + o(x^p) \quad \text{und} \quad V_{B,F} = \lambda^2 x^{2p} + o(x^{2p})$$

- ungerade $p \Rightarrow \chi$ gerade \Rightarrow Supersymmetrie realisiert
 - ▶ $\lambda > 0$: fermionischer Grundzustand
 - ▶ $\lambda < 0$: bosonischer Grundzustand

Partnerpotentiale und Grundzustands-Wellenfunktion für $W = x(1 - x^2)$



Isospektrale Potentiale



Lagrange-Formalismus

- Fermionen: antikommutierende Grassmann-Felder $\psi(t), \bar{\psi}(t)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}W^2(q) + i\bar{\psi}\dot{\psi} - W'\bar{\psi}\psi$$

- Supersymmetrie mit Grassmann-Variablen $\theta, \bar{\theta}$:

$$\delta q = \bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta, \quad \delta\psi = -(i\dot{q} + W)\theta, \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\theta}(i\dot{q} - W)$$

- Änderung der Lagrange-Funktion = totale Zeitableitung

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt} (\dot{q}\bar{\psi}\theta - iW\bar{\theta}\psi)$$

- Wirkung invariant \Rightarrow Symmetrie
- Höhere Dimensionen: Annals Phys. 315 (2005) 467-487

Übergang zur Feldtheorie

- „Übergangsregeln“ Quantenmechanik \rightarrow Feldtheorie

$$q(t) \longrightarrow \phi(t, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$$

$$\psi(t) \longrightarrow \psi(t, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$$

$$\bar{\psi}(t) \longrightarrow \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) = \bar{\psi}(\mathbf{x})$$

$$\bar{\psi}\dot{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}\not{\partial}\psi$$

- (einfachste) Lagrange-Dichte für Felder mit Spin-0 und $\frac{1}{2}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \frac{1}{2}W^2(\phi) - \frac{1}{2}W'(\phi)\bar{\psi}\psi$$

- Supersymmetrie

$$\delta\phi = \bar{\theta}\psi, \quad \delta\psi = (i\not{\partial}\phi - W(\phi))\theta$$

- erzeugt durch Superladungen

$$\delta(\text{Feld}) \propto [\bar{\theta} \hat{Q}, \text{Feld}] \implies \hat{Q}_\alpha$$

- Superalgebra = Poincare-Algebra und

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} \propto (\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta \hat{P}_\mu$$

- Susy = „eindeutige“ Erweiterung der Poincare-Symmetrie
- Poincare-Algebra

$$[\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{J}_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} \hat{J}_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} \hat{J}_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} \hat{J}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} \hat{J}_{\mu\sigma})$$

$$[\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{P}_\rho] = i(\eta_{\mu\rho} \hat{P}_\nu - \eta_{\nu\rho} \hat{P}_\mu)$$

$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0 \quad (\hat{P}_0 = \hat{H})$$

- ergänzt durch

$$\{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta\} = -2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} \hat{P}_\mu$$

$$[\hat{Q}_\alpha, \hat{P}_\mu] = 0$$

$$[\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{Q}_\alpha] = (\Sigma_{\mu\nu} \hat{Q})_\alpha$$

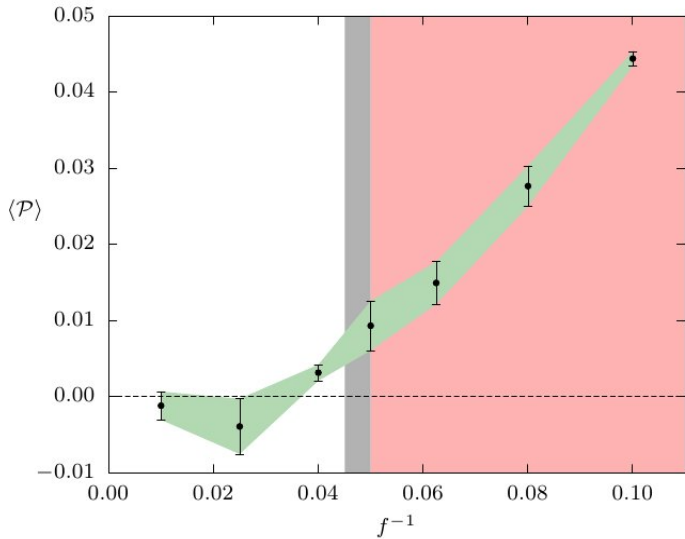
- **Problem:** Poincare-Symmetrie \subset Supersymmetrie \longleftrightarrow Gitter

Gibt es Gitter-Feldtheorien mit (partieller) Susy?

- gibt (unrealistische) Gitter-Eichtheorien mit partieller Susy
- hängt von Dimension der Raumzeit und Art der Susy ab
- aktuelles Forschungsgebiet

Supersymmetrie auf Raumzeit-Gitter

- Euklid'sche Formulierung
- Funktionalintegral-Darstellung
- Diskretisierung (nicht eindeutig)
- „Berechnung“ der Funktionalintegrale (Fermionen → schwierig)
- modernste Algorithmen, Computer-Cluster
- ist Supersymmetrie realisiert/nicht realisiert?
- Massen von Teilchen und Superpartner
- Phasendiagramme
- Effektive Freiheitsgrade tiefen Energien (vgl. QCD)



- Ohne Supersymmetrie
 - ▶ Phasen und Phasenübergänge bei endlichen T und ρ
 - ▶ Zustandsgleichungen, Teilchenmassen
 - ▶ Behandlung von instabilen Zuständen
- Mit Supersymmetrie
 - ▶ Theorien mit Spin 0 und 1/2 Feldern im Detail analysiert
 - ▶ Susy Eichtheorien auf Gitter: erste Untersuchungen (Jena)
Welche Teilchen treten im Energiebereich $E \lesssim 1$ TeV auf?
Exakte Teilchenmassen? Multiplett-Struktur?
- Vergleich mit alternativen Methoden
 - ▶ Funktionelle Renormierungsgruppengleichungen (Jena)